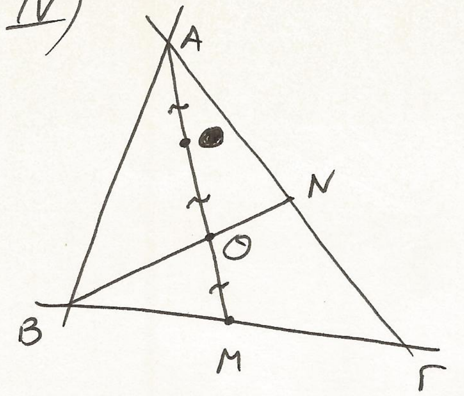
IV)



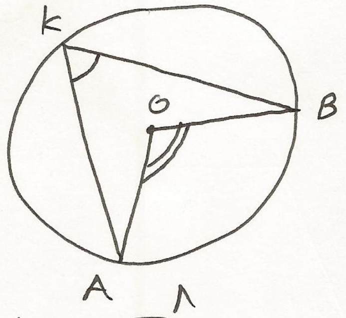
Ορισμός 25:

Σημείο Τομής Διαμέσων $\leftrightarrow$ ΒΑΡΥΚΕΝΤΡΟ $\leftrightarrow$ $AΘ = \frac{2}{3}AM$

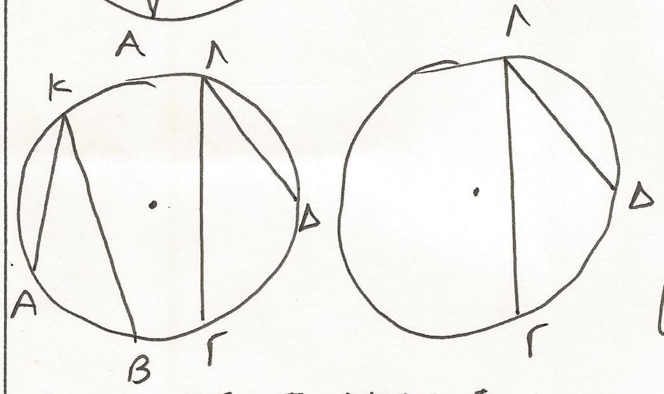
Θ39 ΑΠΕΧΕΙ ΑΠΟ ΚΑΘΕ ΚΟΡΥΦΗ ΤΑ 2/3 ΤΗΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΗΣ ΔΙΑΜΕΣΟΥ

ΣΧΗΜΑΤΑ ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ ΣΕ ΚΥΚΛΟ

• Εγγεγραμμένες Γωνίες:



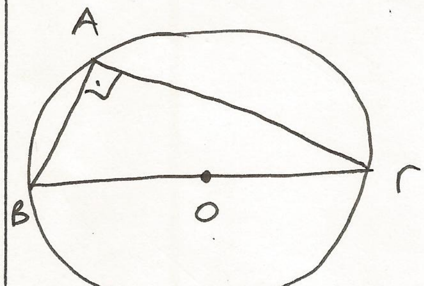
Θ40 $\left.\begin{cases} \hat{K} \text{ εγγεγραμμένη } \widehat{AB} \\ \hat{O} \text{ επίκεντρη } \widehat{AB} \end{cases}\right| \Longrightarrow \hat{O} = 2\hat{K}$



ΙΣΟΙ ΚΥΚΛΟΙ

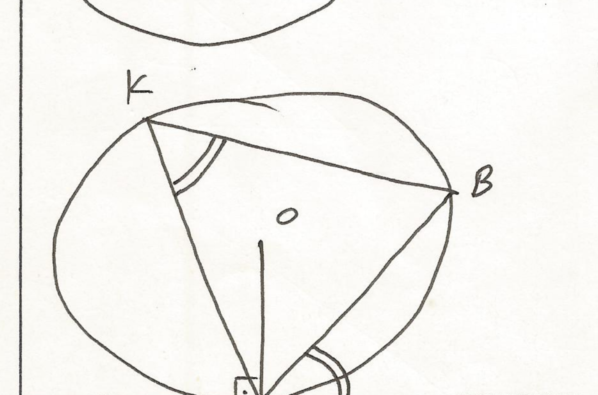
Θ41

$\begin{cases} \hat{K} \text{ εγγεγραμμένη } \widehat{AB} \\ \hat{Λ} \text{ εγγεγραμμένη } \widehat{ΓΔ} \\ \widehat{AB} = \widehat{ΓΔ} \Longleftrightarrow \hat{K} = \hat{Λ} \end{cases}$



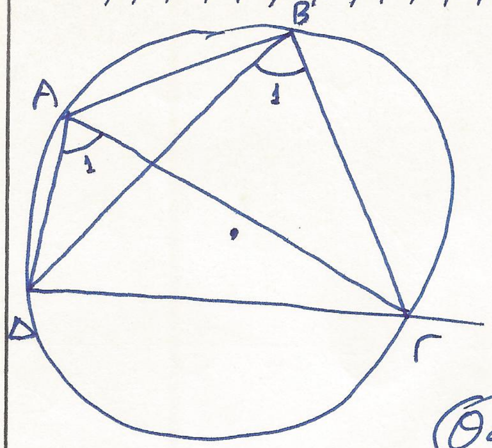
Θ42 $\begin{cases} \hat{A} \text{ εγγεγραμμένη } \widehat{BΓ} \\ BΓ \text{ διάμετρος} \Longleftrightarrow \hat{A} = 90^\circ \end{cases}$

Θ43



$\left.\begin{matrix} AB \text{ χορδή} \\ Aε \text{ εφαπτομένη} \\ \hat{K} \text{ εγγεγραμμένη } \widehat{AB} \end{matrix}\right\} \Longrightarrow B\hat{A}ε = \hat{K}$

• Εγγεγραμμένα - Εγγράψιμα Τετράπλευρα



Θ44
ΑΒΓΔ εγγεγραμμένο $\Longrightarrow$
ΑΒΓΔ εγγράψιμο $\Longleftarrow$
$\left\{ \hat{A}+\hat{\Gamma}=180^\circ \right.$

Θ44α
ΑΒΓΔ εγγεγραμμένο $\Longrightarrow$
ΑΒΓΔ εγγράψιμο $\Longleftarrow$
$\left\{ \hat{A}=\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} \right.$

Θ45
ΑΒΓΔ εγγεγραμμένο $\Longrightarrow$
ΑΒΓΔ εγγράψιμο $\Longleftarrow$
$\left\{ \hat{A}_1=\hat{B}_1 \right.$

* ΑΝΑΛΟΓΙΕΣ ***

Ορισμός 26:

λ = λόγος ευθ. τμημάτων ΑΒ, ΓΔ $\Longleftrightarrow AB=\lambda\cdot\Gamma\Delta \Longleftrightarrow \dfrac{AB}{\Gamma\Delta}=\lambda$

Ορισμός 27:

ΑΒ → ευθ. τμήμα
(ΑΒ) → μήκος ευθ. τμήματος
ΓΔ → μοναδιαίο ευθ. τμήμα
(ΓΔ) = 1

$\Longrightarrow$ Αν $\dfrac{AB}{\Gamma\Delta}=\lambda$ τότε $(AB)=\lambda$

Ορισμός 28:

$\dfrac{AB}{\Gamma\Delta}=\dfrac{\mu}{\nu}=$ ρητός $\Longleftrightarrow$ ΑΒ, ΓΔ σύμμετρα

$\dfrac{AB}{\Gamma\Delta}=\tau=$ άρρητος $\Longleftrightarrow$ ΑΒ, ΓΔ ασύμμετρα

Θ.46 $\dfrac{AB}{\Gamma\Delta}=\dfrac{(AB)}{(\Gamma\Delta)}=$ ανεξάρτητα μονάδας μέτρησης

Θ.47 $AB=\Gamma\Delta \Longleftrightarrow (AB)=(\Gamma\Delta)$

Ορισμός 29:

ΑΝΑΛΟΓΙΑ: $\boxed{\dfrac{AB}{\Gamma\Delta}=\dfrac{EZ}{H\Theta}}$
→ μέσοι όροι
→ ηγούμενοι όροι
→ επόμενοι όροι
→ άκροι όροι

ΗΘ → τέταρτη ανάλογος των ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ

$\boxed{\dfrac{AB}{\Gamma\Delta}=\dfrac{\Gamma\Delta}{EZ}}$

ΓΔ → μέση ανάλογος των ΑΒ, ΕΖ

Θ.48 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΝΑΛΟΓΙΩΝ

I) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \iff \alpha\cdot\delta = \beta\cdot\gamma$

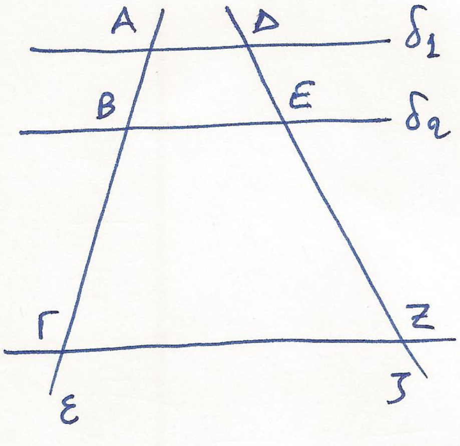
II) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \iff \begin{cases} \frac{\delta}{\beta} = \frac{\gamma}{\alpha} \\ \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta} \\ \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\delta}{\gamma} \end{cases}$

III) $\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \dots = \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} = \frac{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_\nu}{\beta_1+\beta_2+\dots+\beta_\nu}$

IV) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \iff \begin{cases} \frac{\alpha\pm\beta}{\beta} = \frac{\gamma\pm\delta}{\delta} \\ \frac{\alpha}{\beta\pm\alpha} = \frac{\gamma}{\delta\pm\gamma} \end{cases}$

Ορισμός 30:

Μ διαιρεί ΑΒ σε λόγο λ (εσωτερικά ή εξωτερικά) $\iff \frac{AM}{MB} = \lambda \iff AM = \lambda\cdot MB$

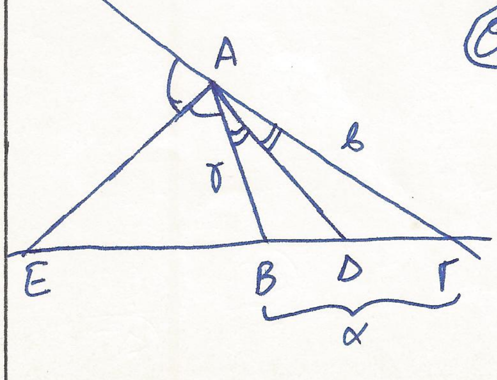


Θ.49 $\left.\begin{array}{l} \delta_1 /\!/ \delta_2 /\!/ \delta_3 \\ \varepsilon, \zeta \text{ τις τέμνουν} \\ AB = B\Gamma \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta E = EZ$

Θ.50 Θεώρημα Θαλή (Θ.Θ.)

$\left.\begin{array}{l} \delta_1 /\!/ \delta_2 /\!/ \delta_3 \\ \varepsilon, \zeta \text{ τις τέμνουν} \end{array}\right\} \iff \frac{AB}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{EZ} = \frac{\Gamma A}{ZA}$ ή

$\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{\Delta E}{EZ}$



Θ.51 Θεώρημα Διχοτόμων

ΑΔ εσωτ. διχοτ. $\overset{\triangle}{\hat{A}B\Gamma} \Rightarrow \frac{\Delta B}{\Delta\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}$

ΑΕ εξωτ. διχοτ. $\overset{\triangle}{\hat{A}B\Gamma} \Rightarrow \frac{EB}{E\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}$

Θ51α $\Delta B = \frac{\alpha\gamma}{\beta+\gamma}$, $\Delta\Gamma = \frac{\alpha\beta}{\beta+\gamma}$

$EB = \frac{\alpha\gamma}{\beta-\gamma}$, $E\Gamma = \frac{\alpha\beta}{\beta-\gamma}$

Ορισμός 31:

Δ,Ε συζυγή αρμονικά Β,Γ $\Longleftrightarrow$ (Β,Γ,Δ,Ε) αρμονική τετράδα

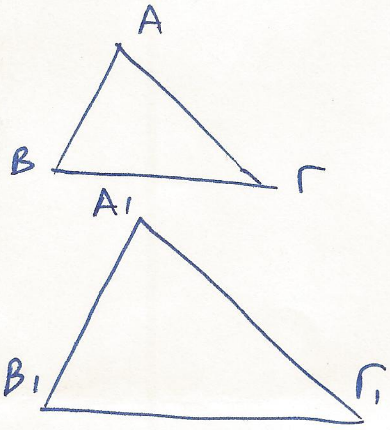
$$\Longleftrightarrow \frac{ΔΒ}{ΔΓ} = \frac{ΕΒ}{ΕΓ}$$

* Ο Μ Ο Ι Ο Τ Η Τ Α ***

Ορισμός 32:

$\overset{\triangle}{ΑΒΓ} \sim Α_1\overset{\triangle}{Β_1}Γ_1 \Longleftrightarrow \hat{Α}=\hat{Α}_1,\ \hat{Β}=\hat{Β}_1,\ \hat{Γ}=\hat{Γ}_1$ ϗ'

$$\frac{ΑΒ}{Α_1Β_1} = \frac{ΒΓ}{Β_1Γ_1} = \frac{ΓΑ}{Γ_1Α_1}$$



Θ52α $\left.\begin{array}{l}\hat{Α}=\hat{Α}_1\\ \hat{Β}=\hat{Β}_1\end{array}\right\} \Longrightarrow \overset{\triangle}{ΑΒΓ} \sim Α_1\overset{\triangle}{Β_1}Γ_1$

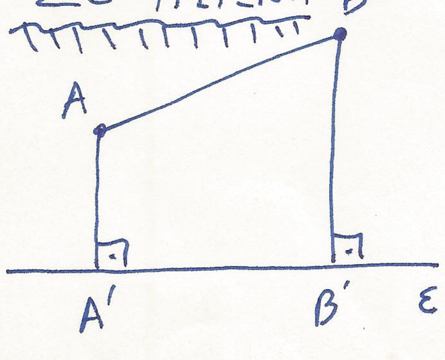
Θ52β $\left.\begin{array}{l}\hat{Α}=\hat{Α}_1\\ \dfrac{ΑΒ}{Α_1Β_1}=\dfrac{ΑΓ}{Α_1Γ_1}\end{array}\right\} \Longrightarrow \overset{\triangle}{ΑΒΓ} \sim Α_1\overset{\triangle}{Β_1}Γ_1$

Θ52γ

$$\frac{ΑΒ}{Α_1Β_1} = \frac{ΒΓ}{Β_1Γ_1} = \frac{ΓΑ}{Γ_1Α_1} \Longrightarrow \overset{\triangle}{ΑΒΓ} \sim Α_1\overset{\triangle}{Β_1}Γ_1$$

* Μ Ε Τ Ρ Ι Κ Ε Σ Σ Χ Ε Σ Ε Ι Σ ***

• Σε ΤΡΙΓΩΝΑ



Ορισμός 33:

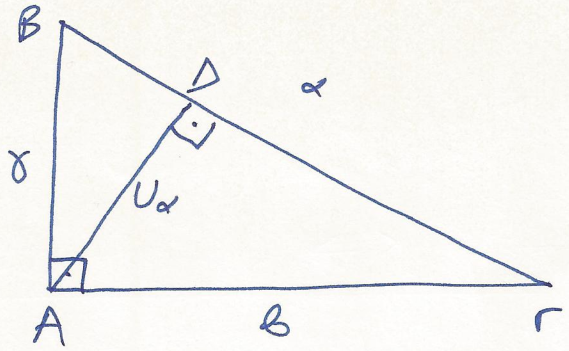
$Α' = προβ_ε Α \Longleftrightarrow ΑΑ' \perp ε$

$\Longleftrightarrow$ $Α'$ = προβολή του Α στην ε

$\Longleftrightarrow$ $ΑΑ'$ = απόσταση του Α από την ε

Ορισμός 34:

$Α'Β' = προβ_ε ΑΒ \Longleftrightarrow ΑΑ' \perp ε$ ϗ' $ΒΒ' \perp ε$



Θ53

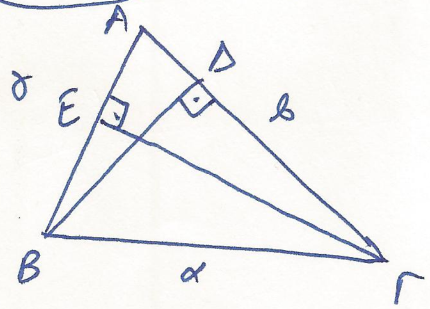
$$\hat{A}=90^\circ \Longrightarrow \begin{cases} \beta^2=\alpha\cdot \text{προβ}_\alpha \beta \quad (\beta^2=\alpha\cdot \Delta\Gamma) \\ \gamma^2=\alpha\cdot \text{προβ}_\alpha \gamma \quad (\gamma^2=\alpha\cdot \Delta B) \end{cases}$$

Θ54 Πυθαγόρειο Θεώρημα

$$\hat{A}=90^\circ \Longleftrightarrow \alpha^2=\beta^2+\gamma^2$$

Θ54α $\hat{A} \lesseqgtr 90^\circ \Longleftrightarrow \alpha^2 \lesseqgtr \beta^2+\gamma^2$

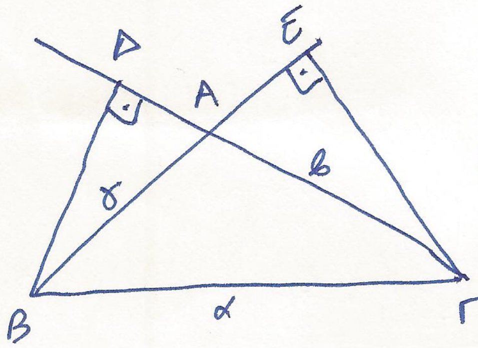
Θ.55 $\hat{A}=90^\circ \Longrightarrow U_\alpha^2=\text{προβ}_\alpha \beta\cdot \text{προβ}_\alpha \gamma$



Θ.56α Γενίκευση Πυθαγορείου για Οξεία Γωνία

$$\hat{A}<90^\circ \Longrightarrow \alpha^2=\beta^2+\gamma^2-2\beta\cdot \underbrace{\text{προβ}_\beta \gamma}_{A\Delta}$$

$$\text{ή } \alpha^2=\beta^2+\gamma^2-2\gamma\cdot \underbrace{\text{προβ}_\gamma \beta}_{AE}$$



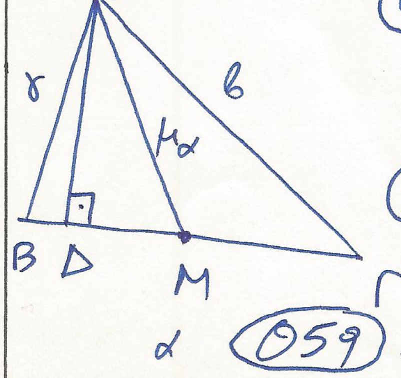
Θ.56β Γενίκευση Πυθαγορείου για Αμβλεία Γωνία

$$\hat{A}>90^\circ \Longrightarrow \alpha^2=\beta^2+\gamma^2+2\beta\cdot \underbrace{\text{προβ}_\beta \gamma}_{A\Delta}$$

$$\alpha^2=\beta^2+\gamma^2+2\gamma\cdot \underbrace{\text{προβ}_\gamma \beta}_{AE}$$

Θ56γ Νόμος Συνημιτόνων:

$$\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\,\text{συν}A$$



Θ57 1ο Θεώρημα Διαμέσων

AM διάμεσος $\overset{\triangle}{AB\Gamma} \Longrightarrow \beta^2+\gamma^2=2\mu_\alpha^2+\dfrac{\alpha^2}{2}$

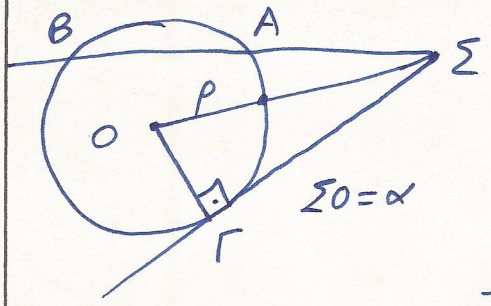
Θ58 2ο Θεώρημα Διαμέσων

AM διάμεσος $\overset{\triangle}{AB\Gamma} \Longrightarrow \beta^2-\gamma^2=2\alpha\cdot \underbrace{\text{προβ}_\alpha \mu_\alpha}_{M\Delta}$

Θ59 $\Longrightarrow U_\alpha=\dfrac{2}{\alpha}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$

Θ60 $\Longrightarrow \mu_\alpha^2=\dfrac{2\beta^2+2\gamma^2-\alpha^2}{4}$ *; Θεώρημα Euler?

• Σε Κύκλο



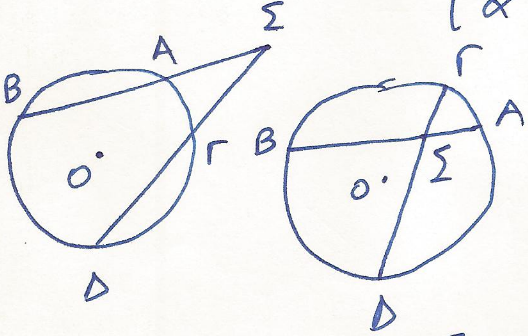
Ορισμός 35:

$$\mathcal{D}^{\Sigma}_{(O,\rho)} = \alpha^2-\rho^2 = \Sigma A\cdot\Sigma B = \Sigma\Gamma^2$$

= δύναμη του Σ ως προς τον (O,ρ)

Ορισμός 36:

$$\begin{cases} \alpha^2-\rho^2>0 \Longleftrightarrow \Sigma \in \text{εξωτερικό του } (O,\rho) \\ \alpha^2-\rho^2=0 \Longleftrightarrow \Sigma \in (O,\rho) \\ \alpha^2-\rho^2<0 \Longleftrightarrow \Sigma \in \text{εσωτερικό του } (O,\rho) \end{cases}$$

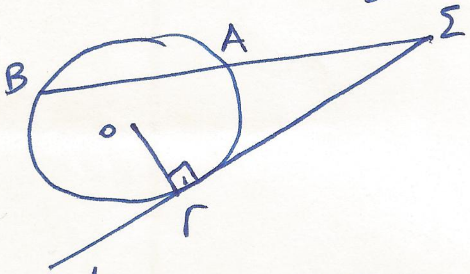


Θ61

ΑΒ, ΓΔ τέμνονται στο Σ

Α,Β,Γ,Δ ομοκυκλικά $\Longleftrightarrow \Sigma A\cdot\Sigma B=\Sigma\Gamma\cdot\Sigma\Delta$

Θ62



ΣΓ εφαπτομένη κύκλου (Α,Β,Γ) $\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \Sigma A\cdot\Sigma B=\Sigma\Gamma^2$

• Κατασκευές

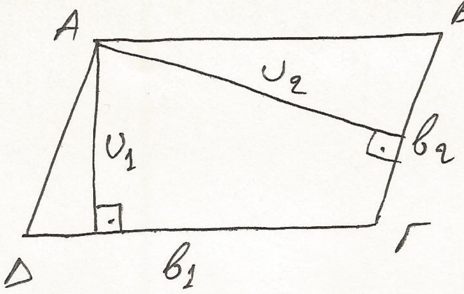
I) Δίνεται ευθ. τμήμα ΑΒ με $(AB)=\alpha$. Να κατασκευασθούν ευθ. τμήματα με μήκος:
(Α) $\nu\cdot\alpha,\ \nu\in\mathbb{N}$ (Β) $\frac{\alpha}{\nu},\ \nu\in\mathbb{N}^*$ (Γ) $\frac{\mu}{\nu}\cdot\alpha,\ \mu\in\mathbb{N},\ \nu\in\mathbb{N}^*$
(Δ) $\sqrt{\nu}\cdot\alpha,\ \nu\in\mathbb{N}$

II) Δίνεται ευθ. τμήμα ΑΒ. Να βρεθεί σημείο Μ της ευθείας ΑΒ, τέτοιο ώστε: $\frac{AM}{MB}=\frac{\mu}{\nu},\ \mu\in\mathbb{N},\ \nu\in\mathbb{N}^*,\ \mu\neq\nu$

III) Δίνονται τα ευθ. τμήματα α, β, γ. Να βρεθεί ευθ. τμήμα x, τέτοιο ώστε: $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{x}$ [κατασκευή τέταρτης αναλόγου]
$x^2=\alpha\cdot\beta$ [κατασκευή μέσης αναλόγου]

IV) [Διαίρεση ευθ. τμήματος σε μέσο και άκρο λόγο]
Δίνεται ευθ. τμήμα ΑΒ με $(AB)=\alpha$. Να διαιρεθεί το ΑΒ σε δύο ευθ. τμήματα $x>\alpha-x$ τέτοια ώστε: $\frac{x}{\alpha}=\frac{\alpha-x}{x}$

• ΕΜΒΑΔΟ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟΥ

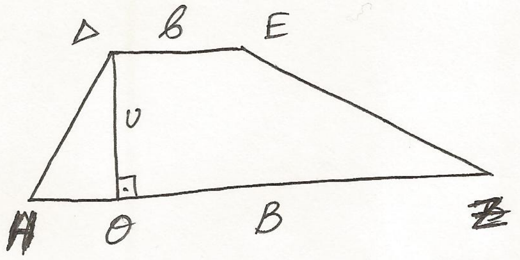


Θ63 ΑΒΓΔ # $\Rightarrow (ΑΒΓΔ) = β_1 \cdot υ_1 = β_2 \cdot υ_2$

Θ63α ΑΒΓΔ ▭ $\Rightarrow (ΑΒΓΔ) = α \cdot β$

Θ63β ΑΒΓΔ □ $\Rightarrow (ΑΒΓΔ) = α^2$

• ΕΜΒΑΔΟ ΤΡΑΠΕΖΙΟΥ

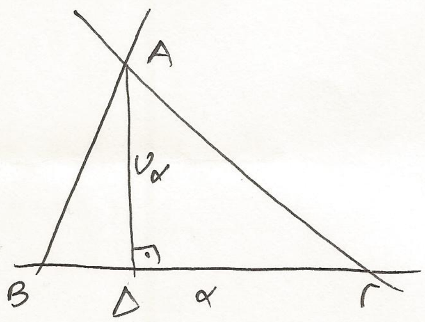


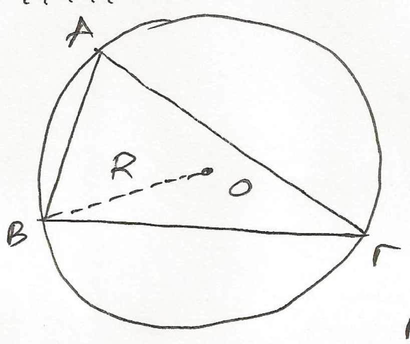
Θ64

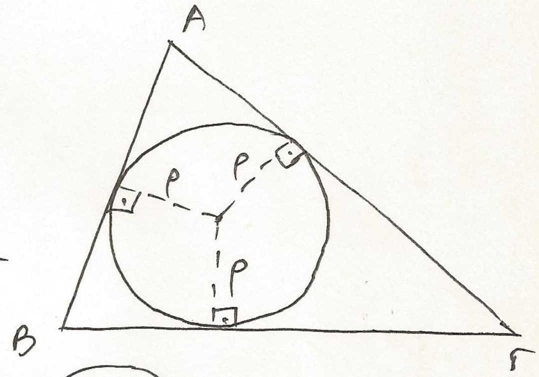
ΔΕΖΗ τραπέζιο $\Rightarrow$

$$(ΔΕΖΗ) = \frac{(B+β)\cdot υ}{2}$$

• ΕΜΒΑΔΟ ΤΡΙΓΩΝΟΥ







Θ65

ΑΒΓ τρίγωνο $\Rightarrow$

$$(ΑΒΓ) = \frac{1}{2} α \cdot υ_α = \frac{1}{2} β \cdot υ_β = \frac{1}{2} γ \cdot υ_γ$$

Θ66

ΑΒΓ τρίγωνο $\Rightarrow$

$$(ΑΒΓ) = \frac{α \cdot β \cdot γ}{4R}$$

Θ67

ΑΒΓ τρίγωνο $\Rightarrow$

$$(ΑΒΓ) = τ \cdot ρ$$

Θ68 (τύπος του Ήρωνα)

ΑΒΓ τρίγωνο $\Rightarrow (ΑΒΓ) = \sqrt{τ(τ-α)(τ-β)(τ-γ)}$

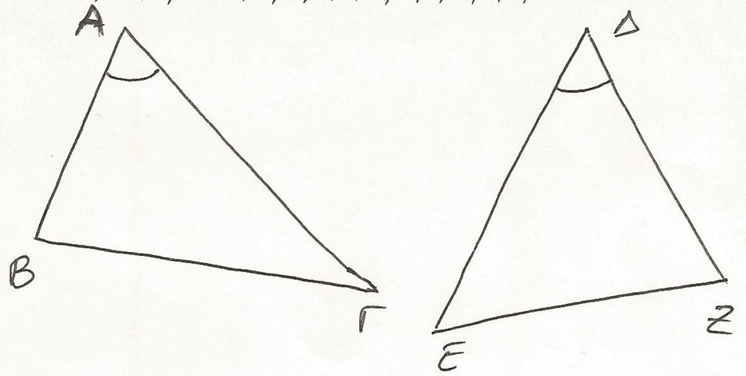
Θ69 ΑΒΓ τρίγωνο $\Rightarrow (ΑΒΓ) = \frac{1}{2} αβ\,ημΓ = \frac{1}{2} βγ\,ημΑ = \frac{1}{2} γα\,ημΒ$

• ΝΟΜΟΣ ΗΜΙΤΟΝΩΝ

Θ70 ΑΒΓ τρίγωνο $\Rightarrow \frac{α}{ημΑ} = \frac{β}{ημΒ} = \frac{γ}{ημΓ} = 2R$

* ΕΜΒΑΔΑ

• ΣΧΕΣΕΙΣ ΕΜΒΑΔΩΝ



(Θ71) Σχήμα 1 ~ Σχήμα 2 με λόγο $\lambda \Longrightarrow$

$$\frac{(\text{Σχήμα 1})}{(\text{Σχήμα 2})} = \lambda^2$$

(Θ72) $\hat{A} = \hat{\Delta}$ ή $\hat{A} + \hat{\Delta} = 180° \Longrightarrow \frac{(AB\Gamma)}{(\Delta EZ)} = \frac{AB \cdot A\Gamma}{\Delta E \cdot \Delta Z}$

ΜΕΤΡΗΣΗ ΚΥΚΛΟΥ

Ορισμός 37:

$A_1A_2 \ldots A_\nu$ κανονικό ν-γωνο $\Longleftrightarrow \begin{cases} A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots = A_\nu A_1 \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \ldots = \hat{A}_\nu \end{cases}$

Ορισμός 38:

1) λ_ν: πλευρά κανονικού ν-γώνου
2) $\hat{\varphi}_\nu$: γωνία -"- -"-
3) O: κέντρο -"- -"-
4) R: ακτίνα -"- -"-
5) α_ν: απόστημα -"- -"-
6) $\hat{\omega}_\nu$: κεντρική γωνία -"- -"-
7) P_ν: περίμετρος -"- -"-
8) E_ν: Εμβαδό -"- -"-

(Θ73) $A_1A_2 \ldots A_\nu$ κανονικό ν-γωνο $\Longrightarrow$

1) $\hat{\varphi}_\nu = 180° - \frac{360°}{\nu}$
2) $\hat{\omega}_\nu = \frac{360°}{\nu}$
3) $\left(\frac{\lambda_\nu}{2}\right)^2 + \alpha_\nu^2 = R^2$
4) $P_\nu = \nu \cdot \lambda_\nu$
5) $E_\nu = \frac{1}{2} \cdot P_\nu \cdot \alpha_\nu$

(Θ74) Κάθε κανονικό πολύγωνο <u>εγγράφεται</u> σ' έναν κύκλο και <u>περιγράφεται</u> σ' έναν άλλο, <u>ομόκεντρο</u> του πρώτου

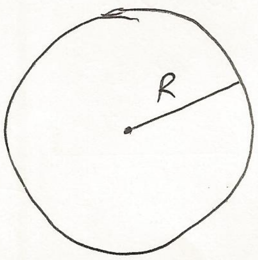
075

	ν	λ_ν	α_ν
ΙΣΟΠΛΕΥΡΟ ΤΡΙΓΩΝΟ	3	$R\cdot\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}\cdot R$
ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ	4	$R\cdot\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot R$
ΚΑΝΟΝΙΚΟ ΕΞΑΓΩΝΟ	6	$R\cdot\sqrt{1}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot R$

076

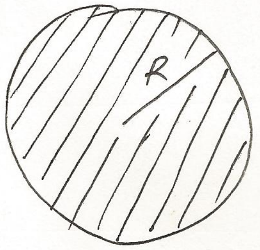
ΜΗΚΟΣ ΚΥΚΛΟΥ

$$L=2\pi R$$



ΕΜΒΑΔΟ ΚΥΚΛ. ΔΙΣΚΟΥ

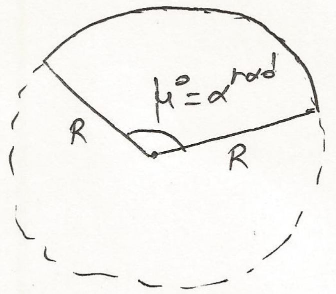
$$E=\pi R^2$$



ΜΗΚΟΣ ΤΟΞΟΥ

$$S=2\pi R\,\frac{\mu^\circ}{360^\circ}$$

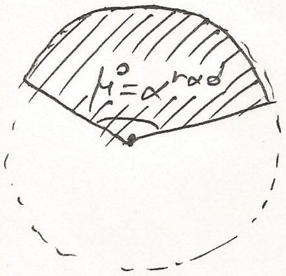
$$S=\alpha.R$$



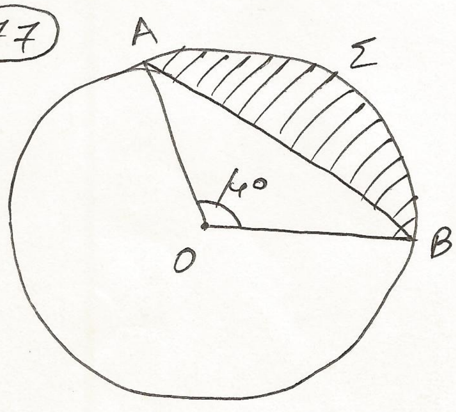
ΕΜΒΑΔΟ ΚΥΚΛ. ΤΟΜΕΑ

$$E_\tau=\pi R^2\,\frac{\mu^\circ}{360^\circ}$$

$$E_\tau=\frac{1}{2}\alpha R^2$$



077



Εμβαδό κυκλικού Τμήματος

$$\boxed{E_{\tau\mu}=E_\tau-E_{O\hat{A}B}}$$

ΟΡΟΛΟΓΙΑ