

# ΛΟΓΙΚΕΣ ΠΡΑΞΕΙΣ

Πόσες είναι οι Λογικές Πράξεις;

Δομουχτής Χ. Γεώργιος

2ο ΓΕΛ Σερρών

24 Ιανουαρίου 2021

Στη συνέχεια θα προσπαθήσουμε να απαντήσουμε  
στα παρακάτω ερωτήματα:

- 1 Πόσες λογικές πράξεις υπάρχουν;
- 2 Πόσες από αυτές είναι χρήσιμες;
- 3 Πόσες από αυτές είναι διαφορετικές μεταξύ τους;

Λογικές Πράξεις (Μονομελείς) που αναφέρονται σε μία μόνο πρόταση:

« $\bar{p}$ »: «άρνηση»

« $\vec{p}$ »: «κατάφαση»

« $\dot{p}$ »: «ταυτολογία»

« $\rho\dot{p}$ »: «αντιλογία»

*Πίνακας Αλήθειας:*

	(1)	(2)	(3)	(4)
$p$	$\bar{p}$	$\vec{p}$	$\dot{p}$	$\rho\dot{p}$
A	$\Psi$	A	A	$\Psi$
$\Psi$	A	$\Psi$	A	$\Psi$

- (3) « $p$  είναι  $p$ »: Η «ταυτολογία» είναι πράξη που μετατρέπει την πρόταση σε αληθή.
- (4) « $p$  δεν είναι  $p$ »: Η «αντιλογία» είναι πράξη που μετατρέπει την πρόταση σε ψευδή.
- (2) «ισχύει η  $p$ »: Η «κατάφαση» είναι πράξη που δεν αλλάζει την πρόταση.
- (1) «δεν ισχύει η  $p$ »: Επομένως η μόνη *χρήσιμη* πράξη είναι η «**άρνηση**» αφού «αντιστρέφει» την πρόταση.

*Πίνακας Αλήθειας:*

	(1)	(2)	(3)	(4)
$p$	$\bar{p}$	$\vec{p}$	$\dot{p}$	$\overset{\circ}{p}$
A	$\Psi$	A	A	$\Psi$
$\Psi$	A	$\Psi$	A	$\Psi$

# 16 ΛΟΓΙΚΕΣ ΠΡΑΞΕΙΣ ΤΑΞΗΣ 2

Λογικές Πράξεις (Διμελείς) που αναφέρονται σε δύο προτάσεις:  
Μπορούμε να ορίσουμε 16 τέτοιες πράξεις που είναι οι:

		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
$p$	$q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$	Ταυτολογία	$q \Rightarrow p$	$\vec{p}$	$\vec{q}$
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
A	Ψ	Ψ	A	Ψ	Ψ	A	A	A	Ψ
Ψ	A	Ψ	A	A	Ψ	A	Ψ	Ψ	A
Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	A	A	A	A	Ψ	Ψ

και οι αρνήσεις τους:

		(1')	(2')	(3')	(4')	(5')	(6')	(7')	(8')
$p$	$q$	$p / q$	$p \downarrow q$	$p \wedge \bar{q}$	$p \vee \bar{q}$	Αντίφαση	$\bar{p} \wedge q$	$\bar{p}$	$\bar{q}$
A	A	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ
A	Ψ	A	Ψ	A	A	Ψ	Ψ	Ψ	A
Ψ	A	A	Ψ	Ψ	A	Ψ	A	A	Ψ
Ψ	Ψ	A	A	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	A	A

# ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ 1

		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
$p$	$q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$	Ταυτολογία	$q \Rightarrow p$	$\bar{p}$	$\bar{q}$
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
A	$\Psi$	$\Psi$	A	$\Psi$	$\Psi$	A	A	A	$\Psi$
$\Psi$	A	$\Psi$	A	A	$\Psi$	A	$\Psi$	$\Psi$	A
$\Psi$	$\Psi$	$\Psi$	$\Psi$	A	A	A	A	$\Psi$	$\Psi$

Οι (1') – (8') είναι αρνήσεις των (1) – (8), επομένως δεν μπορούν να προσφέρουν κάτι διαφορετικό.

		(1')	(2')	(3')	(4')	(5')	(6')	(7')	(8')
$p$	$q$	$p / q$	$p \downarrow q$	$p \wedge \bar{q}$	$p \underline{\vee} q$	Αντίφαση	$\bar{p} \wedge q$	$\bar{p}$	$\bar{q}$
A	A	$\Psi$	$\Psi$	$\Psi$	$\Psi$	$\Psi$	$\Psi$	$\Psi$	$\Psi$
A	$\Psi$	A	$\Psi$	A	A	$\Psi$	$\Psi$	$\Psi$	A
$\Psi$	A	A	$\Psi$	$\Psi$	A	$\Psi$	A	A	$\Psi$
$\Psi$	$\Psi$	A	A	$\Psi$	$\Psi$	$\Psi$	$\Psi$	A	A

## ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ 2

		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
$p$	$q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$	Ταυτολογία	$q \Rightarrow p$	$\vec{p}$	$\vec{q}$
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
A	$\Psi$	$\Psi$	A	$\Psi$	$\Psi$	A	A	A	$\Psi$
$\Psi$	A	$\Psi$	A	A	$\Psi$	A	$\Psi$	$\Psi$	A
$\Psi$	$\Psi$	$\Psi$	$\Psi$	A	A	A	A	$\Psi$	$\Psi$

- Η (5) είναι η «ταυτολογία».
- Οι (7) και (8) είναι οι «καταφάσεις» των αρχικών προτάσεων.
- Η (6) είναι η αντίστροφη συνεπαγωγή της (3), επομένως δεν υπάρχει καινούργια πράξη.

		(1)	(2)	(3)	(4)
$p$	$q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
A	A	A	A	A	A
A	$\Psi$	$\Psi$	A	$\Psi$	$\Psi$
$\Psi$	A	$\Psi$	A	A	$\Psi$
$\Psi$	$\Psi$	$\Psi$	$\Psi$	A	A

Άρα απομένουν 4 χρήσιμες πράξεις, οι:

«σύζευξη», «διάζευξη», «συνεπαγωγή» και «ισοδυναμία»



Συνολικά, λοιπόν, οι χρήσιμες πράξεις είναι πέντε:

$\langle \bar{p} \rangle$ : «άρνηση»

$\langle p \wedge q \rangle$ : «σύζευξη»

$\langle p \vee q \rangle$ : «διάζευξη»

$\langle p \implies q \rangle$ : «συνεπαγωγή»

$\langle p \iff q \rangle$ : «ισοδυναμία»

Όλες οι πράξεις εκφράζονται συναρτήσει

- της «άρνησης» και
- της «σύζευξης».

Συγκεκριμένα:

$$p \vee q \equiv \overline{\bar{p} \wedge \bar{q}}$$

$$p \implies q \equiv \overline{p \wedge \bar{q}}$$

$$p \iff q \equiv (\overline{\bar{p} \wedge q}) \wedge (\overline{p \wedge \bar{q}})$$

$$p \underline{\vee} q \equiv \overline{(\bar{p} \wedge q) \wedge (p \wedge \bar{q})}$$

$$p / q \equiv \overline{p \wedge q}$$

$$p \downarrow q \equiv \bar{p} \wedge \bar{q}$$

Δηλαδή, οι διαφορετικές πράξεις είναι δύο.