ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΡΑΞΕΩΝ ΣΥΝΟΛΩΝ

Γεώργιος Χ. Δομουχτσής

2ο ΓΕΛ Σερρών

6 Οκτωβρίου 2020

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

1. Ιδιότητες Ομάδας
   - Συμμετροδιαφορά
   - Ένωση - Τομή
   - Διαφορά - Καρτεσιανό Γινόμενο
2. Γενίκευση Πράξεων
   - Ένωση - Τομή - Καρτεσιανό Γινόμενο
3. Απορροφητικό Στοιχείο
4. Σχέση Αποτελέσματος Πράξης με τα Αρχικά Σύνολα
5. Υποσύνολο και Πράξεις
6. Αποτέλεσμα Πράξης = Κενό Σύνολο
7. Επιμεριστική Ιδιότητα
8. Ιδιότητες Συμπληρώματος
9. Κανόνες του De Morgan

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΜΜΕΤΡΟΔΙΑΦΟΡΑΣ

Οι ιδιότητες της ομάδας για την «συμμετροδιαφορά» είναι:

1. $A \dotplus B = B \dotplus A$ (αντιμεταθετική)
2. $A \dotplus (B \dotplus \Gamma) = (A \dotplus B) \dotplus \Gamma$ (προσεταιριστική)
3. $A \dotplus \varnothing = A$ (ουδέτερο στοιχείο)
4. $A \dotplus A = \varnothing$ (συμμετρικό στοιχείο)

Δηλαδή το σύνολο $\mathscr{P}(\Omega)$
εφοδιασμένο με την πράξη της συμμετροδιαφοράς,
αποτελεί ομάδα.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΜΗΣ

Οι ιδιότητες της ομάδας για την «τομή» είναι:

1. $A \cap B = B \cap A$ (αντιμεταθετική)
2. $A \cap (B \cap \Gamma) = (A \cap B) \cap \Gamma$ (προσεταιριστική)
3. $A \cap \Omega = A$ (ουδέτερο στοιχείο)
4. $A \cap A = A$ (αδύναμη)

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΕΝΩΣΗΣ

Οι ιδιότητες της ομάδας για την «ένωση» είναι:

1. $A \cup B = B \cup A$ (αντιμεταθετική)
2. $A \cup (B \cup \Gamma) = (A \cup B) \cup \Gamma$ (προσεταιριστική)
3. $A \cup \varnothing = A$ (ουδέτερο στοιχείο)
4. $A \cup A = A$ (αδύναμη)

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΔΙΑΦΟΡΑΣ

Οι ιδιότητες της ομάδας για την «διαφορά» είναι:

1. $A - B \neq B - A$
2. $A - (B - \Gamma) \neq (A - B) - \Gamma$
3. $A - \varnothing = A, \quad \varnothing - A = \varnothing$ (ουδέτερο στοιχείο;)
4. $A - A = \varnothing$

Οι ιδιότητες της ομάδας για το «εσωτερικό γινόμενο» είναι:

1. $A \times B \neq B \times A$
2. $A \times (B \times \Gamma) \neq (A \times B) \times \Gamma$
3. $A \times \Omega \neq A, \quad \Omega \times A \neq A$
4. $A \times A \neq A$

Πότε ισχύουν η αντιμεταθετική και η προσεταιριστική ιδιότητα;

- $A \times B = B \times A \iff A = \varnothing \vee B = \varnothing \vee A = B$
- $A \times (B \times \Gamma) = (A \times B) \times \Gamma \iff A = \varnothing \vee B = \varnothing \vee \Gamma = \varnothing$

ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ ΤΟΜΗΣ:

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_\nu = \bigcap_{\kappa=1}^{\nu} A_\kappa = \{x \in \Omega : x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \ldots \wedge x \in A_\nu\}$$

ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ ΕΝΩΣΗΣ:

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_\nu = \bigcup_{\kappa=1}^{\nu} A_\kappa = \{x \in \Omega : x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \ldots \vee x \in A_\nu\}$$

ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΟΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_\nu = \{(x_1, x_2, \ldots, x_\nu) : x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2 \wedge \ldots \wedge x_\nu \in A_\nu\}$$

ΑΠΟΡΡΟΦΗΤΙΚΟ ΣΤΟΙΧΕΙΟ

Απορροφητικό στοιχείο στους πραγματικούς αριθμούς
είναι ο αριθμός 0 γιατί
$$\alpha \cdot 0 = 0, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

1. $A \cap \varnothing = \varnothing$ (απορροφητικό στοιχείο)
2. $A \cup \Omega = \Omega$ (απορροφητικό στοιχείο)
3. $A - \Omega = \varnothing, \quad \Omega - A = A^c$
4. $A \dotplus \Omega = A^c$
5. $A \times \varnothing = \varnothing \times A = \varnothing$ (απορροφητικό στοιχείο)

ΣΧΕΣΗ ΜΕ A, B

Ποια είναι η σχέση μεταξύ
του αποτελέσματος μιας πράξης δύο συνόλων
και των συνόλων αυτών;

1. $A \cap B \subseteq A, \quad A \cap B \subseteq B$
2. $A \subseteq A \cup B, \quad B \subseteq A \cup B$
3. $A - B \subseteq A, \quad (A - B) \cap B = \varnothing$
4. $(A \dotplus B) \cap A = A - B, \quad (A \dotplus B) \cap B = B - A$
5. $(A \times B) \cap A = \varnothing, \quad (A \times B) \cap B = \varnothing$

ΥΠΟΣΥΝΟΛΟ ΚΑΙ ΠΡΑΞΗ

Ποια είναι η ισοδύναμη σχέση
που ισχύει για το αποτέλεσμα της πράξης μεταξύ δύο συνόλων
αν το ένα σύνολο είναι υποσύνολο του άλλου;

1. $A \subseteq B \Longleftrightarrow A \cap B = A$
2. $A \subseteq B \Longleftrightarrow A \cup B = B$
3. $A \subseteq B \Longleftrightarrow A - B = \varnothing$
4. $A \subseteq B \Longleftrightarrow A \dotplus B = B - A$
5. $A \subseteq B \Longleftrightarrow A \times B = (;)$

Ποια είναι η ισοδύναμη σχέση
αν το αποτέλεσμα της πράξης μεταξύ δύο συνόλων
είναι το κενό σύνολο;

1. $A \cap B = \varnothing \iff$ $\boxed{A, B \ \textbf{ξένα} \text{ μεταξύ τους}}$ (Ορισμός)
2. $A \cup B = \varnothing \iff A = \varnothing \wedge B = \varnothing$
3. $A - B = \varnothing \iff A \subseteq B$
4. $A \dot{+} B = \varnothing \iff A = B$
5. $A \times B = \varnothing \iff A = \varnothing \vee B = \varnothing$

Τομής ως προς «πράξεις»

1. $A \cap (B \cup \mathit{\Gamma}) = (A \cap B) \cup (A \cap \mathit{\Gamma})$
2. $A \cap (B - \mathit{\Gamma}) = (A \cap B) - (A \cap \mathit{\Gamma})$
3. $A \cap (B \dotplus \mathit{\Gamma}) = (A \cap B) \dotplus (A \cap \mathit{\Gamma})$

Ένωσης ως προς «πράξεις»

4. $A \cup (B \cap \mathit{\Gamma}) = (A \cup B) \cap (A \cup \mathit{\Gamma})$
5. $A \cup (B - \mathit{\Gamma}) \supseteq (A \cup B) - (A \cup \mathit{\Gamma})$
6. $A \cup (B \dotplus \mathit{\Gamma}) \supseteq (A \cup B) \dotplus (A \cup \mathit{\Gamma})$

Συμμετροδιαφοράς ως προς «πράξεις»

7. $A \dotplus (B \cap \mathit{\Gamma}) \supseteq (A \dotplus B) \cap (A \dotplus \mathit{\Gamma})$
8. $A \dotplus (B \cup \mathit{\Gamma}) \subseteq (A \dotplus B) \cup (A \dotplus \mathit{\Gamma})$
9. $A \dotplus (B - \mathit{\Gamma}) \supseteq (A \dotplus B) - (A \dotplus \mathit{\Gamma})$

ΕΠΙΜΕΡΙΣΤΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ 2

Διαφοράς από αριστερά ως προς «πράξεις»

10. $A - (B \cap \Gamma) = (A - B) \cup (A - \Gamma)$
11. $A - (B \cup \Gamma) = (A - B) \cap (A - \Gamma)$
12. $\left[A - (B \dotplus \Gamma)\right] \bigcap \left[(A - B) \dotplus (A - \Gamma)\right] = \varnothing$

Διαφοράς από δεξιά ως προς «πράξεις»

13. $(A \cap B) - \Gamma = (A - \Gamma) \cap (B - \Gamma)$
14. $(A \cup B) - \Gamma = (A - \Gamma) \cup (B - \Gamma)$
15. $(A \dotplus B) - \Gamma = (A - \Gamma) \dotplus (B - \Gamma)$

ΕΠΙΜΕΡΙΣΤΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ 3

Καρτεσιανού Γινομένου από αριστερά ως προς «πράξεις»

16. $A \times (B \cap \Gamma) = (A \times B) \cap (A \times \Gamma)$
17. $A \times (B \cup \Gamma) = (A \times B) \cup (A \times \Gamma)$
18. $A \times (B - \Gamma) = (A \times B) - (A \times \Gamma)$
19. $A \times (B \dotplus \Gamma) = (A \times B) \dotplus (A \times \Gamma)$

Καρτεσιανού Γινομένου από δεξιά ως προς «πράξεις»

19. $(A \cap B) \times \Gamma = (A \times \Gamma) \cap (B \times \Gamma)$
20. $(A \cup B) \times \Gamma = (A \times \Gamma) \cup (B \times \Gamma)$
21. $(A - B) \times \Gamma = (A \times \Gamma) - (B \times \Gamma)$
22. $(A \dotplus B) \times \Gamma = (A \times \Gamma) \dotplus (B \times \Gamma)$

ΕΠΙΜΕΡΙΣΤΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ 4

«**Πράξη**» ως προς Καρτεσιανό Γινόμενο

24. $A \cap (B \times \Gamma) \neq (A \cap B) \times (A \cap \Gamma)$
25. $A \cup (B \times \Gamma) \neq (A \cup B) \times (A \cup \Gamma)$
26. $A \dotplus (B \times \Gamma) \neq (A \dotplus B) \times (A \dotplus \Gamma)$
27. $A - (B \times \Gamma) \neq (A - B) \times (A - \Gamma)$
28. $(A \times B) - \Gamma \neq (A - \Gamma) \times (B - \Gamma)$

Συμπλήρωμα Βασικών Συνόλων

1. $\left(A^c\right)^c = A$
2. $\Omega^c = \varnothing$
3. $\varnothing^c = \Omega$

Σύνολο «**Πράξη**» Συμπληρωματικό

4. $A \cap A^c = \varnothing$
5. $A \cup A^c = \Omega$
6. $A - A^c = A, \quad A^c - A = A^c$
7. $A \dotplus A^c = \Omega$

Ειδικές Ιδιότητες

8. $A^c \dotplus B^c = A \dotplus B$
9. $A \subseteq B \Longleftrightarrow B^c \subseteq A^c$

Ποιο είναι το συμπλήρωμα του αποτελέσματος μιας πράξης;

Συμπλήρωμα Τομής

1. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ (κανόνας του De Morgan)
2. $(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_\nu)^c = A_1^c \cup A_2^c \cup \cdots \cup A_\nu^c$

Συμπλήρωμα Ένωσης

3. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ (κανόνας του De Morgan)
4. $(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_\nu)^c = A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_\nu^c$

Συμπλήρωμα Διαφοράς

5. $(A - B)^c = A^c \cup B$

Συμπλήρωμα Συμμετροδιαφοράς

6. $(A \dotplus B)^c = \left(A^c \cap B^c\right) \cup (A \cap B)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Τομή

1. $A \cap (A \cup B) = A$
2. $A \cap (A - B) = A - B$
3. $A \cap (B - A) = \varnothing$
4. $A \cap (A \dotplus B) = A - B$

Ένωση

5. $A \cup (A \cap B) = A$
6. $A \cup (A - B) = A$
7. $A \cup (B - A) = A \cup B$
8. $A \cup (A \dotplus B) = A \cup B$

Διαφορά από αριστερά

5. $A - (A \cap B) = A - B$
6. $A - (A \cup B) = \varnothing$
7. $A - (A \dotplus B) = \varnothing$

Διαφορά από δεξιά

12. $(A \cap B) - A = \varnothing$
13. $(A \cup B) - A = B - A$
14. $(A \dotplus B) - A = B - A$

Συμμετροδιαφορά

15. $A \dotplus (A \cap B) = A - B$
16. $A \dotplus (A \cup B) = B - A$
17. $A \dotplus (A - B) = A \cap B$
18. $A \dotplus (B - A) = A \cup B$