

ΛΟΓΙΚΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

Μέρος II: Μαθηματικά

Δομουχτής Χ. Γεώργιος

2ο ΓΕΛ Σερρών

24 Ιανουαρίου 2021

Ο «Προτασιακός Λογισμός»

ασχολείται με

- τις «**λογικές προτάσεις**» και
- τις «**πράξεις**» μεταξύ αυτών.

Λογική Πρόταση

είναι μια πεπερασμένη διαδοχή λέξεων ή συμβόλων (με προκαθορισμένη έννοια), η οποία

- έχει ένα πλήρες (και αυτοτελές) νόημα και επιπλέον
- χαρακτηρίζεται μόνο ως «αληθής» ή μόνο ως «ψευδής».

Λογική πρόταση είναι η περίοδος:

- «ο αριθμός 5 είναι άρτιος»,
γιατί είναι ψευδής.

Δεν είναι λογική πρόταση η περίοδος:

- «ο α είναι ακέραιος»,
γιατί δεν γνωρίζουμε αν είναι αληθής ή ψευδής.

***** Η έννοια «**λογική πρόταση**» είναι *αρχική*. *****
***** Οι έννοιες «**αληθής**» και «**ψευδής**» είναι *αρχικές*. *****

Η Μαθηματική Λογική

ονομάζεται «**Δίτιμη** Μαθηματική Λογική».

Το δομικό στοιχείο της Μαθηματικής Λογικής:

Απλή Πρόταση

είναι αυτή που δεν αναλύεται σε απλούστερες.

Συμβολικά: $p, q, r, \dots, p_1, p_2, \dots, q_1, q_2, \dots, r_1, r_2, \dots$

Όλες μαζί συγκροτούν:

Το σύνολο \mathbb{L}

είναι το σύνολο όλων των απλών λογικών προτάσεων.

Δεχόμαστε τα ακόλουθα αξιώματα:

Αξίωμα I

Υπάρχει μία τουλάχιστον απλή πρόταση.

Δηλαδή, δεχόμαστε την ύπαρξη του συνόλου $\mathbb{L} \neq \emptyset$.

Αξίωμα II

Κάθε απλή πρόταση είναι μονοσήμαντα ορισμένη και δεν μας ενδιαφέρει το σημασιολογικό της περιεχόμενο (εσωτερική δομή).

Αξίωμα III

Σε κάθε πρόταση $p \in \mathbb{L}$ αντιστοιχεί μία μοναδική τιμή αλήθειας, A ή Ψ .

Δηλαδή, με άλλα λόγια δεχόμαστε τα παρακάτω:

- Υπάρχει η συνάρτηση (τιμή αλήθειας): $\tau : \mathbb{L} \ni p \longrightarrow \tau(p) \in \{A, \Psi\}$.
- $\mathbb{L} = \mathbb{L}^A \cup \mathbb{L}^\Psi$.
- Συμβολικά: $\tau(p) \stackrel{\text{ορισ}}{=} \begin{cases} A, & \text{αν } p \in \mathbb{L}^A, \\ \Psi, & \text{αν } p \in \mathbb{L}^\Psi. \end{cases}$
- κάθε απλή πρόταση είναι ή μόνο αληθής ή μόνο ψευδής.
Ποτέ, ταυτόχρονα και τα δύο.

Αξίωμα IV

Το \mathbb{L} είναι εφοδιασμένο με 5 λογικούς συνδέσμους - πράξεις

$$(\langle \neg \rangle, \langle \wedge \rangle, \langle \vee \rangle, \langle \implies \rangle, \langle \iff \rangle)$$

με τους οποίους σχηματίζουμε σύνθετες προτάσεις, από απλές προτάσεις με πεπερασμένου πλήθους βήματα.

Λογικοί Σύνδεσμοι:

- $\langle \wedge \rangle$: συζευκτικό
- $\langle \vee \rangle$: εγκλειστικό διαζευκτικό
- $\langle \underline{\vee} \rangle$: αποκλειστικό διαζευκτικό
- $\langle \implies \rangle$: υποθετικό
- $\langle \iff \rangle$: αμφι-υποθετικό

Σύμβολα:

- $\langle \neg \rangle$: «όχι»
- $\langle \equiv \rangle$: «ισότητα»
- $\langle \vdash \rangle$: «ταυτολογία»

Το παραγόμενο στοιχείο της Μαθηματικής Λογικής:

Σύνθετη Πρόταση

είναι αυτή που αναλύεται σε απλούστερες, οι οποίες συνδέονται μεταξύ τους με λογικούς συνδέσμους ή σύμβολα.

Συμβολικά: $P(p, q, r, \dots), Q(p, q, r, \dots), \dots$

Όλες μαζί συγκροτούν:

Το σύνολο $\mathcal{P}(\mathbb{L})$

είναι το σύνολο όλων των σύνθετων λογικών προτάσεων και προφανώς

$$\mathbb{L} \subset \mathcal{P}(\mathbb{L})$$

Αξίωμα V

Υπάρχει το σύνολο των σύνθετων προτάσεων $\mathcal{P}(\mathbb{L})$, που είναι υπερσύνολο του \mathbb{L} και το οποίο είναι **κλειστό** ως προς τις πράξεις που ορίζουν οι λογικοί σύνδεσμοι.

- Συνώνυμα των σύνθετων προτάσεων $P(p, q, r, \dots)$, $Q(p, q, r, \dots)$, ... είναι τα:
 - **Λογικοί Τύποι**
 - **Λογικές Παραστάσεις**
 - **Προτασιακές Παραστάσεις**
- Οι απλές προτάσεις $p, q, r \dots$ που συνθέτουν έναν λογικό τύπο ονομάζονται επίσης **μεταβλητές** του λογικού τύπου.

Τιμή Αλήθειας μιας Σύνθετης Πρότασης

- είναι A αν η πρόταση είναι αληθής.
- είναι Ψ αν η πρόταση είναι ψευδής.

Συμβολικά:

$$\tau(P) \stackrel{\text{ορσ}}{=} \begin{cases} A, & \text{αν } P \text{ αληθής,} \\ \Psi, & \text{αν } P \text{ ψευδής.} \end{cases}$$

- Ουσιαστικά είναι μια επέκταση της προηγούμενης συνάρτησης στο σύνολο των σύνθετων προτάσεων $\mathcal{P}(\mathbb{L})$. Δηλαδή,

$$\tau : \mathcal{P}(\mathbb{L}) \ni P \longrightarrow \tau(P) \in \{A, \Psi\}$$

- 1 Οι απλές προτάσεις p, q, r, \dots ονομάζονται επίσης:
 - *Στοιχειώδεις Παραστάσεις*
- 2 Ειδικά, οι 5 σύνθετες προτάσεις

$$\bar{p}, p \wedge q, p \vee q, p \implies q, p \iff q$$

ονομάζονται:

- *Βασικές Παραστάσεις* ή
 - σύνθετες προτάσεις 1ης βαθμίδας
- 3 Οι υπόλοιπες σύνθετες προτάσεις λέγονται επίσης:
 - σύνθετες προτάσεις 2ης βαθμίδας