

ΟΡΙΣΜΟΣ ΣΥΝΟΛΟΥ

Γεώργιος Χ. Δομουχτσής

2ο ΓΕΛ Σερρών

1 Οκτωβρίου 2020

- 1 Εμπειρική Θεμελίωση της Έννοιας «Σύνολο»
 - Σύνολο
 - Στοιχείο
 - Ανήκει
- 2 Βασικό Σύνολο
 - Σαφώς Καθορισμένα
- 3 Βασική Ισότητα
 - Σαφώς Διακεκριμένα

Αρχικές Έννοιες

- «**Σύνολο**»
- «**Στοιχείο**» Συνόλου
- Στοιχείο «**Ανήκει**» σε Σύνολο

Αξιοματική Θεμελίωση;
ή
Εμπειρική Θεμελίωση;

Ορισμός κατά Georg Cantor

Σύνολο είναι μια συλλογή «αντικειμένων»,

- **σαφώς καθορισμένων** και
- **σαφώς διακεκριμένων** μεταξύ τους,

που θεωρούμε ότι αποτελούν μια **ολότητα**,

(δηλαδή, θεωρούμε ότι αποτελούν ένα νέο αντικείμενο).

Συμβολίζουμε με κεφαλαία γράμματα: $A, B, \Gamma, \Delta, \dots, A, B, C, D, \dots$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:

- 1 Το σύνολο των άρτιων φυσικών αριθμών
- 2 Το σύνολο των κατοίκων του Νομού Σερρών

Ορισμός

Στοιχεία συνόλου είναι τα «αντικείμενα» που το αποτελούν.

Συμβολίζουμε με μικρά γράμματα: $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots, a, b, c, d, \dots$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:

- 1 Οι 4, 6, 8 είναι στοιχεία του συνόλου των άρτιων φυσικών αριθμών
- 2 Οι «Γιώργος», «Ελένη» και «Αφροδίτη» είναι στοιχεία του συνόλου των κατοίκων του Νομού Σερρών

Ορισμός

- $\sigma \in \Sigma \iff$ το στοιχείο σ **ανήκει** στο σύνολο Σ
- $\Sigma \ni \sigma \iff$ το σύνολο Σ **περιέχει** το στοιχείο σ
- $\sigma \notin \Sigma \iff$ το στοιχείο σ **δεν ανήκει** στο σύνολο Σ
- $\Sigma \not\ni \sigma \iff$ το σύνολο Σ **δεν περιέχει** το στοιχείο σ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:

- 1 Το 34 **ανήκει** στο σύνολο των άρτιων φυσικών αριθμών
- 2 Το σύνολο των κατοίκων του Ν. Σερρών **περιέχει** την «Αφροδίτη»
- 3 Η «Ευλαμπία» **δεν ανήκει** στο σύνολο των κατοίκων του Ν. Σερρών
- 4 Το σύνολο των άρτιων φυσικών αριθμών **δεν περιέχει** τον αριθμό 57

Αξίωμα

Ισχύει η μία και μόνον η μία από τις σχέσεις:

$$\sigma \in \Sigma \vee \sigma \notin \Sigma$$

Ορισμός

Αντικείμενο είναι οτιδήποτε μπορεί να υποπέσει στην αντίληψή μας είτε με τις αισθήσεις μας είτε με τη νόησή μας.

Ορισμός

Σύμβολο είναι το στοιχείο της Γλώσσας που χρησιμοποιούμε για να περιγράψουμε ένα Αντικείμενο.

Βασικό Σύνολο!
και
Βασική Ισότητα!

Ορισμός

Βασικό είναι το σύνολο «όλων» των αντικειμένων.

Συμβολίζεται με: Ω

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

- Σε κάθε μαθηματικό θέμα, για να αποφεύγουμε τις αντινομίες, πρέπει να αναχωρούμε από ένα συγκεκριμένο σύνολο, το Ω .
- Κατόπιν, με βάση τα στοιχεία και τα υποσύνολα του Ω , προχωρούμε στην ανάπτυξη του θέματος.
- Διαφέρει από πρόβλημα σε πρόβλημα.
 - 1 Στην Στερεομετρία, το Ω είναι το σύνολο των σημείων του χώρου.
 - 2 Στην Άλγεβρα, το $\Omega = \mathbb{R}$.

Βασικό Σύνολο!

Εξήγηση

Αν θεωρήσουμε ένα οποιοδήποτε αντικείμενο,
να μπορούμε να πούμε με μοναδικό τρόπο,
αν αυτό ανήκει ή όχι στο σύνολο.

ΑΝΤΙΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

«Το σύνολο των καλών Ελληνικών ταινιών»

Τα στοιχεία του δεν είναι σαφώς καθορισμένα.

Έστω

- ένα αντικείμενο (με σύμβολο) α και
- ένα δεύτερο αντικείμενο (με σύμβολο) β .

Ορισμός Βασικής Ισότητας

Τότε (α «ίσον» β)

$$\alpha = \beta \iff \begin{array}{l} \text{τα } \alpha \text{ και } \beta \text{ είναι δύο σύμβολα του ίδιου αντικειμένου} \\ \iff \text{τα } \alpha \text{ και } \beta \text{ είναι το ίδιο αντικείμενο} \end{array}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Έστω

- α = φυσικός δορυφόρος της Γης και
- β = Σελήνη.

Τότε $\alpha = \beta$.

Έστω

- ένα αντικείμενο (με σύμβολο) α και
- ένα δεύτερο αντικείμενο (με σύμβολο) β .

Ορισμός Ανισότητας

Τότε (α «διάφορον» β)

- $$\alpha \neq \beta \iff \text{τα } \alpha \text{ και } \beta \text{ είναι δύο σύμβολα διαφορετικών αντικειμένων}$$
- $$\iff \text{τα } \alpha \text{ και } \beta \text{ είναι δύο διαφορετικά αντικείμενα}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Έστω

- $\alpha =$ πρώτος αριθμός και
- $\beta =$ άρτιος αριθμός διάφορος του 2.

Τότε $\alpha \neq \beta$.

Ιδιότητες

- 1 $\alpha = \alpha$ (ανακλαστική)
- 2 $\alpha = \beta \implies \beta = \alpha$ (συμμετρική)
- 3 $\alpha = \beta \wedge \beta = \gamma \implies \alpha = \gamma$ (μεταβατική)

Θεμελιώδες Αξίωμα

Ισχύει η μία και μόνον η μία από τις σχέσεις:

$$\alpha = \beta \vee \alpha \neq \beta$$

Βασική Ισότητα!

Εξήγηση

Αν θεωρήσουμε δύο οποιαδήποτε αντικείμενα του συνόλου,
να μπορούμε να πούμε με μοναδικό τρόπο,
αν αυτά είναι διαφορετικά ή όχι.

ΑΝΤΙΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

«Το σύνολο με στοιχεία $12, 22 - 10, 3 \times 4, 16, 48 \div 3$ »

Τα στοιχεία του δεν είναι σαφώς διακεκριμένα.